L’Étoile flamboyante : symbolisme pythagoricien.

Introduction

Les Old charges en témoignent : pour les opératifs, Géométrie et Maçonnerie sont synonymes et elles évoquent tantôt Pythagore, tantôt Euclide, comme l’un des fondateurs du métier qui enseigna la Maçonnerie aux Égyptiens.

Les maçons, même les spéculatifs, reçoivent avec leur initiation une filiation pythagoricienne. Le Delta placé à l’orient en témoigne… L’Étoile flamboyante en est un second témoignage. En effet, tracer d’un seul trait l’Étoile à cinq branches était l’un des signes de reconnaissance des pythagoriciens.

Malheureusement, la culture contemporaine est très éloignée du pythagorisme qui n’est rien d’autre qu’une « métaphysique des **nombres et des figures géométriques** ». Il en résulte que cet aspect du symbolisme est souvent, non pas négligé, mais ignoré. Il est même, par certains, considéré comme sans intérêt…

Digression nécessaire : Nombres, figures, symboles

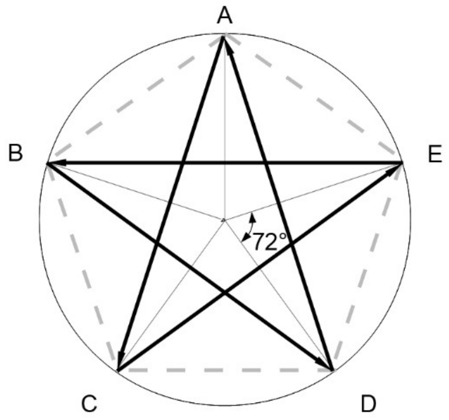
La lecture de cette digression est nécessaire seulement à ceux qui n’ont pas lu le premier article de cette série *Le Delta : Symbolisme pythagoricien* *[lien hypertexte ou référence de page]*

Fin de la digression

L’Étoile : un symbole.

Dans certains rites (Rite Écossais et diverses variantes du Rite Français), l’Étoile flamboyante apparaît déjà sur le tableau d’Apprenti, mais les Apprenti ne reçoivent aucune explication en ce qui concerne son sens ou sa présence sur le tableau de leur grade.

Aspect physique



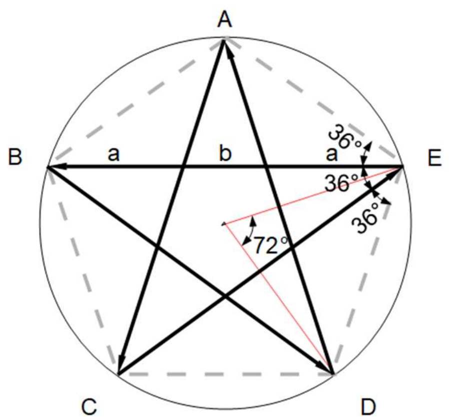
L'Étoile flamboyante est un pentagone étoilé… Pour tracer cette figure on commence par déterminer les sommets d'un pentagone puis on les joint dans l'ordre suivant : A – C, C – E, B – D, D – A.

L'angle au centre de l'Étoile est de 72°, et chaque corde (A – C, C – E, B – D, D – A) sous-tend un arc de 144°.

Ce pentagone est la première Étoile d'ordre impair et peut être tracé d'un seul trait, sans lever le poinçon de la pierre (ou actuellement le crayon du papier). C'est le cas de toutes les Étoiles d'ordre impair.

L'Étoile à cinq branches est donc une ouverture sur le monde du « continu » quand le monde sensible -celui perceptible a nos sens – est par nature discontinu.

Elle permet de construire les nombres ϕ et $1/\phi$ nombres qu'il faut penser comme $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et non comme 1,618 Parce que cette écriture à forme décimale n'est qu'une astuce permettant de simplifier le calcul littéral (calcul écrit en utilisant des chiffres arabes).

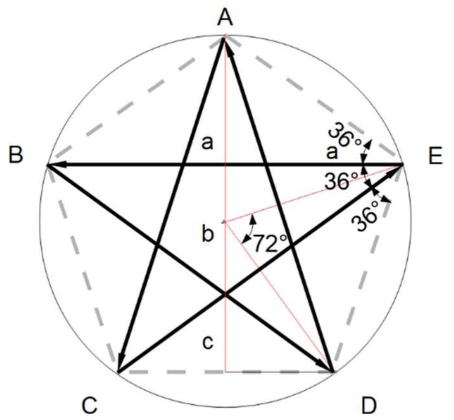


Soit a = 1 : b / a = $\frac{1}{\phi}$, a / b = ϕ.

Soit b= 1 : a = ϕ, a + b = ϕ^2 a + b + a → 1+ 2ϕ = ϕ^3.

Soit a + b = c et c=1 : c / a = ϕ

La hauteur du pentagone qui est également celle du pentagone étoilé est divisée dans les mêmes proportions.



Notons d'abord que a = b et que c / b = a/b = 1 / ϕ.
Si c =1b= ϕ. Si b =1 :
b +c → 1 + 1/ϕ = ϕ
et a + b + c = 1 + ϕ = ϕ ²

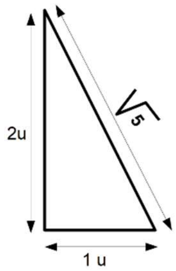
Explication et importance du nombre d'or :

Considérons un grand segment de droite appelé a et un segment plus petit appelé b.

Pour que le rapport de a à b soit au nombre d'or, il faut que :

$\frac{a+b}{a}$ *soit égal à* $\frac{a}{b}$.

La clé de l'Étoile et du nombre d'or : les nombres diagonaux



L'expression « nombres diagonaux » est celle qu'employaient les pythagoriciens pour désigner ce que nous appelons nombres rationnels[1].

Racine de 5 est un nombre diagonal (c'est la diagonale d'un rectangle de 1 / 2 ou l'hypoténuse d'un triangle rectangle de 1 / 2. Sa particularité, comme celle de toutes les racines (sauf si la somme des carrés des côtés est- également un carré) est d'être incommensurable avec les côtés. Ce qui signifie que si on divise u par un nombre a et Racine de 5 par un nombre b jamais, quelles que soient les valeurs de a ou / et de b on ne pourra écrire u/a = $\frac{u}{a} = \frac{\sqrt{5}}{b}$. Ceci n'est plus vrai pour un nombre carré. Remarquons que si l'on décide que le côté vertical de notre triangle d'exemple mesure 1 u et le coté horizontal u/2 L'hypoténuse mesure $\frac{\sqrt{5}}{2}$;

[1] Voir sur les nombres diagonaux Jean-Luc Caradeau : *Les nombres figurés pythagoriciens* (chapitre XIII page 185 et suivantes) Éditions Hermésia 2017.

ce qui montre la relativité des mesures ; une propriété que nous allons utiliser pour nos explications.

Ce que l'on appelle « nombre d'or » porte de nombreux autres noms : « division en moyenne et extrêmes raison », « divine proportion », « médiété géométrique » ... Et j'en oublie probablement...

En matière de nombre d'or, la référence par excellence est l'ouvrage de Fra Lucas Pacioli di Borgo San Sepulcro *La divine proportion* parue vers 1510. Il en fut fait une un traduction en Français[2]que nous consultons pour cet article. Ile exprimait les rapports ci-dessus en cette forme :

Une droite est dite partagée en moyenne et extrême raison (selon la proportion dorée) quand toute la quantité est au plus grand segment comme le grand segment est au plus petit.

Il démontre aussi dans son ouvrage *que* $\phi^2 = \phi+1$. Et donne sous une autre forme l'équation : $\phi^2 = \phi \times 1 + \phi \times 1/\phi$

Ainsi, si un segment est partagé en moyenne et extrême raison (selon la divine proportion) en considérant que a est la somme de b + c et que b est plus grand que c.

Si on considère que a est égal à ϕ alors b est égal à 1 et c est égal à $\frac{1}{\phi}$.

Résumons quelques particularités de ϕ :

[2] La date de la première édition n'est pas connue. La seconde édition fut imprimée sur les presses des Compagnons du Devoir, aux dépens de La librairie du Compagnonnage le 25 novembre 1988.

Opération	Résultat
ϕ^2 ($\phi \times \phi$)	$\phi + 1$
$1/\phi$	$\phi - 1$
$2 - \phi$	$1 / \phi^2$ ou $1 / (\phi + 1))$ ou $1-(\phi-1)$
ϕ^3	$2\phi +1$ ou $(\phi + 1) / (\phi -1)$
ϕ^n	$(n-1) \phi + (n - 2)$
$-1/\phi$	$1- \phi$
$1/\phi^2$	$1 - 1/\phi \rightarrow 2 - \phi$
$1/\phi^3$	$2 / \phi - 1 \rightarrow 2\phi -3$
$1/\phi^4$	$2 – 3 / \phi \rightarrow 5 - 3\phi$

Par ailleurs, si une longueur c est partagée au nombre d'or

Si $c = 1$:

- $b = 1 / \phi$ soit $\phi -1$,
- $a = 1 - 1 / \phi$ soit $1 - (\phi -1)$.

Si $c = \phi$

- $b = 1$,
- $a = \frac{1}{\phi}$ soit $\phi -1$.

Enfin, pour démontrer les propriétés de ϕ nous allons utiliser une expression mathématique appelée identité remarquable :
$(a – b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Exemple numérique : a = 2 et b = 4. a - b = 2 et le carré de 2 est 4
Avec l'expression : a2 = 4, b2 = 16 2ab=16 et 4 - 16 + 16 = 4.

Fra Pacioli décrit treize propriétés du nombre d'or qu'il appelle des « effets ».

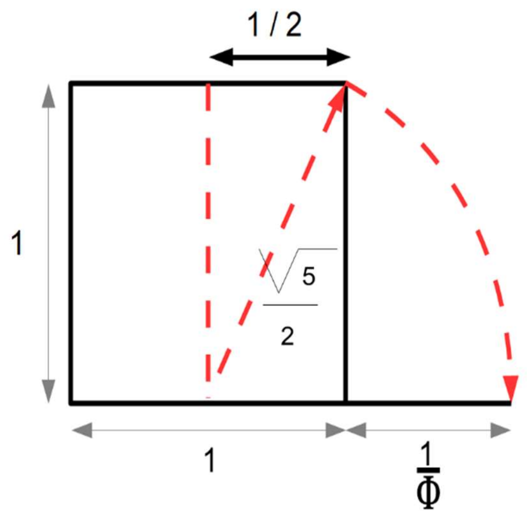
Nous les citerons toutes mais ne démontrerons pas toutes celles que nous citerons. Certaines propriétés sont en effet des évidences, (nous ne les démontrerons pas) d'autres, comme la troisième ont des démonstrations trop complexes ou trop longues pour avoir leur place dans cet article.

Première propriété

Il faut donc affirmer que quand une longueur est partagée de cette façon le produit de la longueur partagée par la petite partie est égal au carré de la grande partie.

En voici la démonstration graphique.

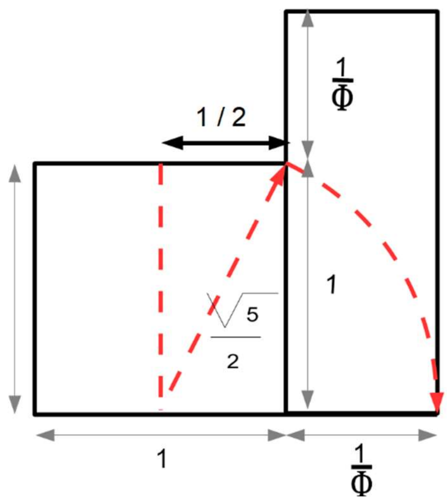
Dans un premier temps nous construisons un rectangle d'or :



Nous avons seulement déterminé la longueur du plus grand côté. Nous construisions un carré de 1 / 1. Nous le divisons en deux rectangles égaux la diagonale de ces rectangles mesure $\frac{\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1}{\phi}$ est équivalent à $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$. Le grand côté a donc pour valeur ϕ

Nous construisons ensuite le rectangle dont le grand côté mesure

1 + 1/ϕ (soit ϕ) et le petit côté 1/ϕ .



L'aire du carré de côté 1 est égale à 1. Celle du rectangle de ϕ sur 1/ϕ est égale à $\phi \times \frac{1}{\phi}$ soit $\frac{\phi}{\phi}$ = 1.

La construction résout la une partie du Dit des compagnons : « *Trois tables ont porté le Graal ; l'une est ronde, **l'autre carrée et la troisième rectangulaire**. Elles sont **d'égales surfaces** […]* »

Seconde propriété

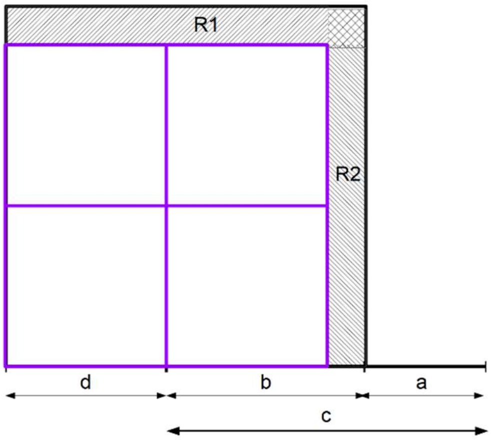
Fra Lucas Pacioli la qualifie « d'essentielle. »

Si à une longueur c divisée au nombre d'or en deux segments a et b, b étant plus grand que a, on ajoute une longueur d, telle que le carré de b + d soit égal à cinq fois celui de d. La quantité ajoutée d est nécessairement égale à la moitié de c et elle est ajoutée à la plus grande longueur.

En voici la démonstration graphique :

On considère c = 10, est divisé au nombre d'or par deux segments a et b, b étant plus grand que a. On ajoute d = 5 à b.

Il existe évidemment une démonstration algébrique de cette propriété…



On construit le carré de b +d (en traits fins gris). Puis quatre carré de côté 2 d. Il reste un espace composé de deux rectangles pour compléter le carré de d.

C'est ce que fait Fra Paccioli ce qui lui permet de donner partiellement une explication par le calcul très complexe.

Cependant le problème ne saurait changer si nous considérons que :

La longueur totale c est égale à ϕ,

La partie majeure b est égale à $\frac{1}{\phi}$ soit (ϕ -1),

La partie mineure a est égale à $1 - \frac{1}{\phi}$;

C'est ce que nous faisons pour simplifier l'explication

Les rectangles R1 et R2 sont égaux entre eux et forment, en leur ajoutant un carré de coté $1 - \frac{\phi}{2}$ une équerre. Si la surface de l'équerre est égale à $\frac{\phi^2}{4}$ alors le carré de coté d + b est égal à cinq fois le carré de d.

R1 + R2 = 2 [ϕ ($1 - \frac{\phi}{2}$)] +($1 - \frac{\phi}{2}$)^2

R1 + R2 = Expression 1 + expression 2

Expression 1 = 2(ϕ - ϕ^2 /2$\phi - \frac{\phi^2}{2}$) ou 2ϕ - ϕ^2 (ϕ^2 = ϕ +1) donc 2ϕ - (ϕ +1) = ϕ -1

Expression 2 = 1 - ϕ + ϕ^2 / 4 donc 1 - ϕ + ϕ^2 / 4

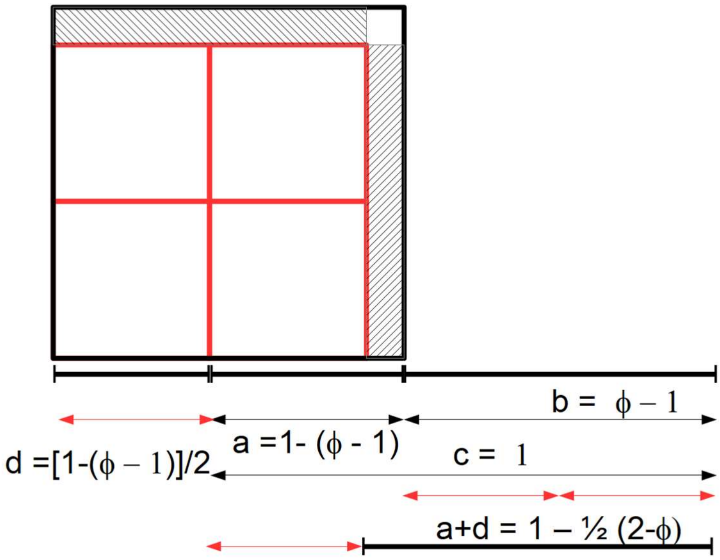
Total :1 - ϕ + ϕ -1 = 0 et l'aire de l'équerre formée par les rectangles R1 et R2 vaut $\phi^2 / 4$

Troisième propriété

Fra Lucas Pacioli la qualifie de « singulière »

Considérons une longueur c divisée au nombre d’or en deux segments a et b, b étant plus grand que a. Si à a on ajoute la moitié de b ; le carré de a + b sera égal à cinq fois le carré de b/2.

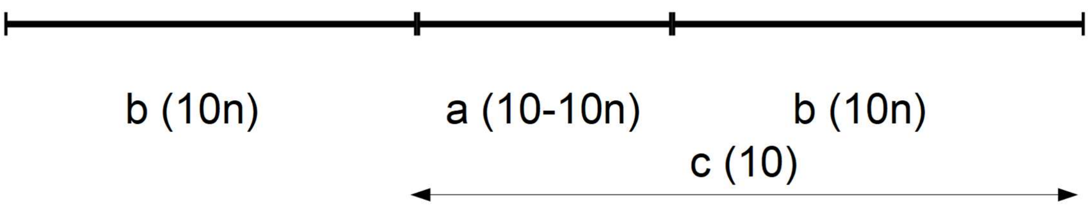
Nous ne démontrons pas cette propriété, les calculs s'avérant trop complexes.



Quatrième propriété

Fra Lucas Pacioli qualifie d’ineffable

Soit un segment de droite c dont la longueur est égale à 10 partagée en moyenne et extrême raison en deux segments a et b, b étant plus grand que a. si on ajoute b à c, alors d =b + c est divisée au nombre d’or c étant la majeure partie et b étant la partie mineure.

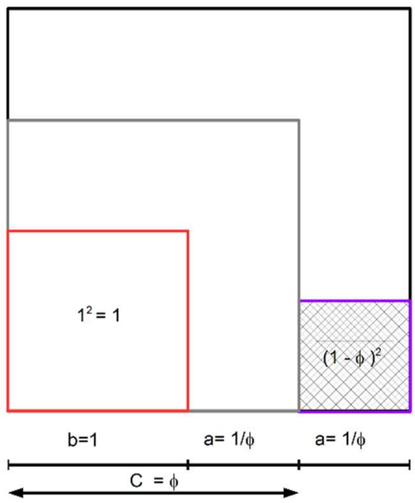


La longueur n est toujours égale à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{1}{\phi}$ donc b est égal à 10 fois l'inverse de phi et associé à un segment de valeur 10 forme une nouvelle section dorée et c + b est égal à 10 ϕ.

Cinquième propriété

Fra Lucas Pacioli la qualifie « d'admirable »

Soit une longueur c divisée selon la divine proportion, la somme du carré de la partie mineure a et de celui de la quantité tout entière est égale à trois fois celle du carré de la partie majeure (b) : $c^2 + a^2 = 3b^2$.



Si on considère que b est égal à 1, alors, c est égal a ϕ et a à $\frac{1}{\phi}$ dans ce cas :

b élevé au carré est égal à 1,

a est égal a ϕ - 1,
carré de c : 1 + $(\phi - 1)^2$.

Donc a 1 on ajoute $\phi^2 - 2\phi + 1$

Or $\phi^{\,2} = 1 + \phi$ (carré de c).

Donc on ajoute à 1 + ϕ (1 + ϕ) – 2 ϕ + 1. Le carré de c ajouté au carré de a est donc égal à 3 ; et donc à trois fois le carré de b.

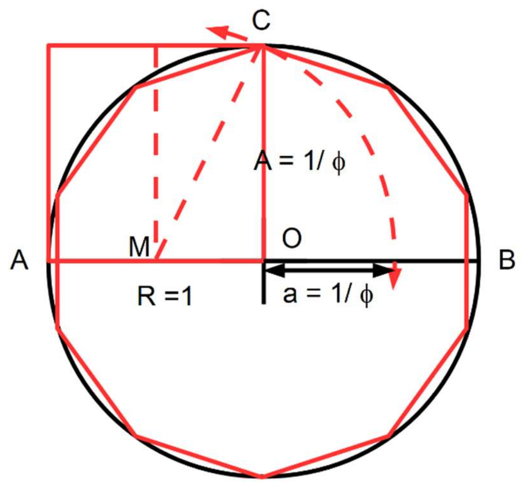
Sixième propriété

Elle explique seulement que le résultat d'une division en moyenne et extrême raison a toujours pour résultat deux nombres rationnels ... C'est une évidence.

Septième propriété

Elle est en rapport avec la construction de l'Étoile à cinq branches. Pacioli prétend que cet effet est « inestimable ». La huitième est l'inverse de la précédente.

Elles s'expriment ainsi :
Si au côté de l'hexagone régulier on ajoute celui du décagone régulier la somme des deux grandeur est divisée selon la divine proportion.

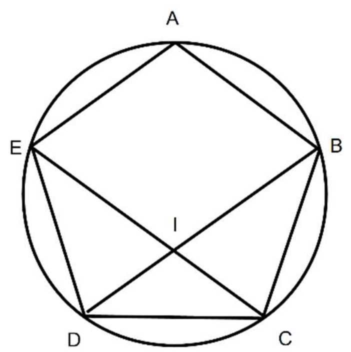


Si la plus grande partie d'une longueur divisée selon la proportion dorée est égale au rayon d'un cercle, alors la plus petite partie est égale au côté du décagone inscrit.
Le diamètre AB mesure 2. le rayon R mesure 1, M est le milieu de AO MC mesure Racine de 5/ 2.

Neuvième propriété

Elle est, selon Pacioli, supérieure à toutes les autres

Elle explique seulement que les diagonales d'un pentagone régulier se divisent l'une l'autre selon la divine proportion... Ce que nous avons déjà vu lors de la description de l'Étoile.



Pacioli ajoute que EI et BI sont tous deux égaux au côté du pentagone

Dixième propriété

Elle est triviale bien que Pacioli la qualifie de suprême.

Elle se résume ainsi : si c est une longueur partagée au nombre d'or en deux segments a et b, si d est une autre grandeur partagée pareillement par a' et b', a et b ou a' et b' subissant une même opération (multiplication ou division) on obtiendra une nouvelle grandeur e, partagée au nombre d'or.

Onzième propriété

Pacioli la qualifie de « très excellente. »

Elle se résume ainsi soit c le côté d'un hexagone régulier (ou le rayon c'un cercle) Si on le divise selon la divine proportion, sa plus grande partie sera le côté du décagone inscrit.

Douzième propriété

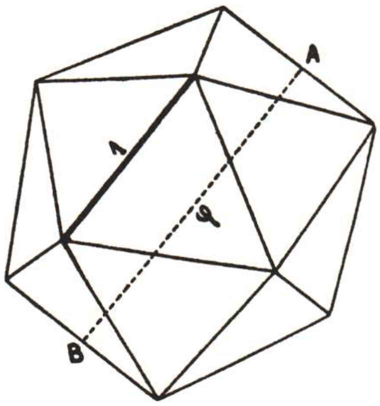
Elle nous amène à considérer le rapport de la divine proportion a la face triangulaire de l'icosaèdre régulier.

Nous ne ferons que l'énoncer. Soit une grandeur c divisée au nombre d'or par deux segments a et b, avec b plus grand que c.

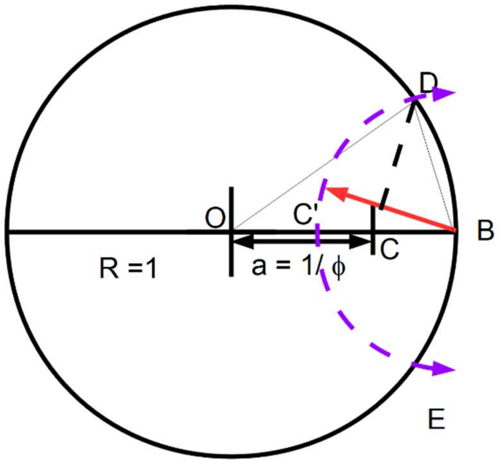
La racine carrée de $c^2 + b^2$ et la racine carrée de $c^2 + a^2$ seront toujours dans le même rapport que le côté du cube et le coté de l'icosaèdre inscrits dans une même sphère… Nous n'avons pas réussi à vérifier cette assertion.

En revanche, il faut signaler la relation montrée par Don Néroman dans son livre *Le nombre d'or*[3] *:* le diamètre intérieur d'un dodécaèdre est égal à ϕ si le côté des faces triangulaires est égal à 1.

3



Treizième propriété explique simplement comment construire un triangle isocèle dont chacun des deux angles à la base est le double de l’angle au sommet



Le rayon OB étant divisé au nombre d’or, en prenant B pour centre on trace un cercle de rayon OC pour déterminer le point D. OC étant le côté du décagone inscrit l’angle Ô mesure 36°. Comme la somme des angles d’un triangle est 180° et que le triangle ODB est isocèle, les angles D et B mesurent 72°.

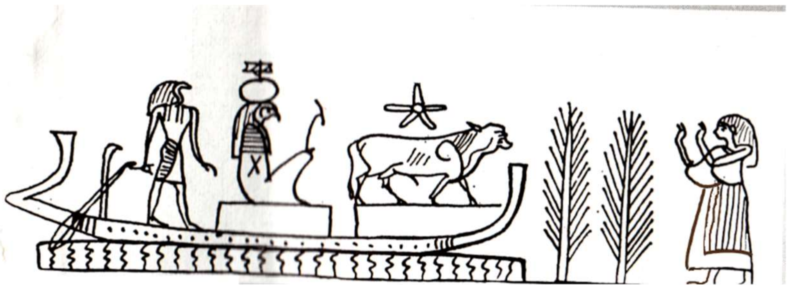
C’est le point de départ de la construction du pentagone et de l’Étoile à cinq branches… par ailleurs DC = DB = OC Donc OCD est un triangle au nombre d’or dont l’angle au sommet est de 144° et les angles à la base de 18°… Enfin, le segment DE que nous n’avons pas tracé est le côté du pentagone inscrit. Pour cette propriété Pacioli renvoie simplement le lecteur au quatrième livre des Eléments de Géométrie d’Euclide.

Maintenant que nous avons une idée précise de l’importance du nombre d’or, Revenons à l’Étoile à cinq branches par le nombre d’or.

Le jardin des Souchets cultivé par les bienheureux

Penchons – nous sur le chapitre 109 du livre des morts. Le défunt (l'Osiris puisqu'ainsi sont appelés tous les défunts) décrit dans une invocation le Champ des souchets[4].

La vignette représente selon De Rougé : « Le dieu Ra (Ré) dans une barque ; un jeune veau, surmonté d'une Étoile, vogue avec lui vers deux arbres près desquels se tient le défunt. Le veau figure le Netertiau ou dieu du matin, nom de la planète Vénus »



« ...les murs du champ sont en cuivre, métal de Venus. Ensuite il décrit l' orge qui mesure cinq coudées avec des tiges de trois coudées

et des épis de deux coudées. »

« Cela nous donne une suite de nombres croissants : 2, 3, 5 et « 5 » est la

somme de 2 et 3. Si on veut bien considérer que ces nombres sont des éléments d'une suite où chaque terme est égal à la somme des deux précédents et qu'on essaye de prolonger cette suite par la gauche et la droite on obtient : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... C'est la suite de Fibonacci[5] qui engendre naturellement une suite de fractions dont la limite tend vers le nombre d'or, lequel justement régit la croissance des plantes. »

Ce pourrait être un hasard, mais cette probabilité diminue quand on rappelle :

- que dans ce chapitre apparaît l'Étoile du matin donc la planète Vénus dont l'un des noms en égyptien est « le dieu cinq »,

[4] D'après Marie Delclos et Jean-Luc Caradeau, *Le livre des morts des anciens Égyptiens décrypté*, Éditions Alliance Magique 2019. Toutes les citations à propos du livre des morts sont extraites de cet ouvrage.
[5] Fibonacci v 1170 – v 1250

- qu'en Hiéroglyphe tous les noms d'astre ont comme déterminatif une Étoile à cinq branches.

L'hypothèse d'un hasard s'éloigne encore car suit la description de l'épeautre qui pousse dans le même champ : « l' épeautre (elle suit celle de l' orge), qui mesure 7 coudées avec des tiges de 4 coudées et des épis de 3 coudées, engendre une suite comparable jouissant de la même propriété. 1, 3, 4, 7, 11, 18[6]. On nous précise ensuite que les « bienheureux » qui moissonnent ces céréales mesurent 9 coudées, le nombre neuf n'étant pas sans rappeler l'ennéade d'Héliopolis, ville où se trouve la pierre Benben sur laquelle se perche l'oiseau Benou qui justement est un autre nom de la planète Venus dans la langue égyptienne ».

Ce chapitre prouve que les Égyptiens avaient généralisé la suite de Fibonacci, qu'ils connaissaient le nombre Phi et l'associaient à la planète Vénus qui justement, dans son mouvement céleste trace en huit ans une Étoile à cinq branches (voir l'article de Marie Delclos L'Étoile à cinq branches sur 450fm (https://450.fm/2024/11/02/letoile-flamboyante-ou-letoile-a-cinq-branches/) pour plus de détails sur ce phénomène.

La suite de Fibonacci et le nombre d'or

Il est connu, et tout le monde sait que la suite de Fibonacci a pour limite le bomber ϕ . En revanche ce qu'on ignore en général, c'est qu'elle est liée aux puissances du nombre phi.

En effet :

[6] Suite de Lucas 1842 -1871.

Puissances de ϕ	Suite de Fibonacci		Inverses	Valeurs
ϕ^1	ordre	valeur	$1 / \phi^1$	$1 - \phi$
$\phi^2 = 1 + \phi$	1	1	$1 / \phi^2$	$2 - \phi$
$\phi^3 = 1 + 2\phi$	2	1	$1 / \phi^3$	$2\phi - 3$
$\phi^4 = 2 + 3\phi$	3	2	$1 / \phi^4$	$5 - 3\phi$
$\phi^5 = 3 + 5\phi$	4	3	$1 / \phi^5$	$5\phi - 8$
	5	5	$1 / \phi^6$	$13 - 8\phi$
	6	8		
Formule générale : $(n-1)\phi + (n - 2)$ Ou, en fonction de la suite de Fibonacci : $\phi^{r =} F_r-1 + F_r\phi$ (r étant le rang d'un nombre dans la suite)			Formule générale pour $1 / \phi^r$: Si r est pair : $F_{r+1} - F_r\phi$ Si r est impair : $F_r\phi - F_{r+1}$	

Le fait que, dans l'Étoile a cinq branches ou pentagone étoilé tout soit « au nombre d'or » explique son importance symbolique. Par ailleurs son lien cosmique avec la planète Vénus qui est tour a tour l'Étoile du matin et l'Étoile du soir tout en étant l'astre le plus visible et le plus brillant du ciel nocturne, est peut-être un hasard. Cependant, hasard ou pas, ce lien est un symbole important qui lui a probablement valu d'être associée[7] à la déesse de la beauté en Grèce et à Rome.

Par ailleurs, les Égyptiens devaient attacher une grande importance aux propriétés mathématiques de cette Étoile. D'ailleurs on n'en trouve en Égypte antique (à notre connaissance) aucune représentation géométrique. Elle est toujours représentée sous la forme du hiéroglyphe « seba » que nous voyons au dessus de Neter Thiau.

Ce signe signifie Étoile mais aussi « porte » et « enseignement ». Placé près d'un homme tenant un bâton il est le déterminatif du verbe « enseigner ». « Ce qui signifie que : enseigner « c'est aussi donner une lumière, une Étoile à celui qui étudie afin qu'il puisse s'orienter ». « Enfin, ajoute Christian Jacq,

[7] Une déesse étant un intelligible (ou si vous préférez une entité n'appartenant pas au monde sensible) elle ne peut pas en même temps une boule de rochers orbitant autour du Soleil.

« Seba c’est aussi la porte et l’on comprendra aisément que l’enseignement ouvre la porte de la connaissance[8] ».

Ainsi le rite écossais rectifié fait dire au premier surveillant durant la réception au second grade : « Contemplez cette Étoile flamboyante à cinq pointes ; apprenez à la connaître, et qu’elle soit dès à présent votre unique guide. »

L’orateur lisant les instructions morales du grade revient sur le rôle de l’Étoile « mais si la nuit, mon Frère, venait à vous surprendre, ne vous découragez pas, et bien loin d’abaisser vos yeux sur la terre, cherchez au-dessus de vous cette Étoile flamboyante qui pourra seule diriger votre marche et vous ramener près de vos Frères dans les avenues de ce temple. »

Évidemment la nuit est ici une allusion aux ténèbres spirituelles et les avenues du temple désigne la voie…

[8] Christian Jacqu cité par Marie Delclos et Jean-Luc Caradeau in *Le livre des morts des anciens Égyptiens décrypté, voir note 4.*